$(A|B)$ righe → equazioni

colonne → immagini d. applicazione lin. associata.

$AX = 0$ $\quad \ker(X \to AX)$

applicazioni forme bilineari e prodotti scalari:

Forma bilineare su $V_n(\mathbb{K})$ $\quad n < \infty$

è una funzione

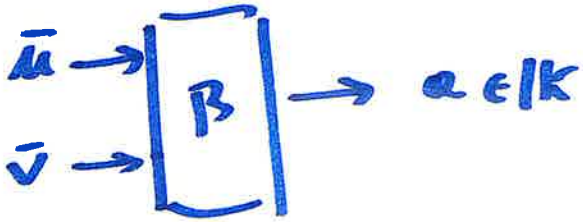
$$\beta : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

bilineare.

$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V_n(\mathbb{K})$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $\beta(\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}, \bar{w}) =$
  $= \lambda\beta(\bar{u}, \bar{w}) +$
  $\mu\beta(\bar{v}, \bar{w})$

- $\beta(\bar{u}, \lambda\bar{v}+\mu\bar{w}) =$
  $= \lambda\beta(\bar{u}, \bar{v}) + \mu\beta(\bar{u}, \bar{w})$



BILINEARE . Def: $\beta: V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare è detta

- SIMMETRICA SE $\forall \bar{u}, \bar{v}: \beta(\bar{u}, \bar{v}) = \beta(\bar{v}, \bar{u})$
- ANTISIMMETRICA SE $\forall \bar{u}, \bar{v}: \beta(\bar{u}, \bar{v}) = -\beta(\bar{v}, \bar{u})$.
- ALTERNANTE se $\forall \bar{u} \in V: \beta(\bar{u}, \bar{u}) = 0$.

Se $1 \neq -1$ cioè $2 \neq 0$ ANTISIMMETRICA $\Leftrightarrow$ ALTERNANTE.

in generale ALTERNANTE $\Rightarrow$ ANTISIMMETRICA

ALTERNANTE

$$\beta(\bar{u}, \bar{u}) = 0 \quad \forall \bar{u}$$

$$\beta(\bar{u}, \bar{v}) = \beta(\bar{u}, \bar{v}) + \beta(\bar{v}, \bar{v}) = \beta(\bar{u}+\bar{v}, \bar{v}) =$$

$$= \beta(\bar{u}+\bar{v}, \bar{v}) + \beta(\bar{u}+\bar{v}, \bar{u}+\bar{v}) =$$

$$= \beta(\bar{u}+\bar{v}, \bar{u}+2\bar{v}) = \beta(\bar{u}+\bar{v}, \bar{u}+2\bar{v}) - \beta(\bar{u}+2v, \bar{u}+2\bar{v})$$

$$= \beta(-\bar{v}, u+2\bar{v}) + \beta(-\bar{v}, -\bar{v}) =$$

$$= \beta(-\bar{v}, \bar{u}+\bar{v}) + \beta(-\bar{v}, -\bar{v}) =$$

$$= \beta(-\bar{v}, \bar{u}) \quad \Rightarrow \text{ANTISIMM.}$$

⚠ ANTISIMMETRICA $\neq$ NON SIMMETRICA

(se $1 = -1 \Rightarrow$ ANTISIMMETRICA = SIMMETRICA!).

Oss: Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$ e β una forma bilineare su $V_n(\mathbb{K})$.

Allora 1) β dipende solo da $\mathcal{B}$ e dai valori che assume su coppie $\bar{e}_i, \bar{e}_j$

2) Se $\bar{u} = \sum x_i \bar{e}_i$ e $\bar{w} = \sum y_j \bar{e}_j$

$$\Rightarrow \beta(\bar{u}, \bar{w}) = [x_1 \dots x_n] B \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ove $B = ((\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j)))_{i,j=1}^{n}$

$$\beta(\bar{u}, \bar{w}) = {}^{T}X B Y$$

Dim:

$$\beta(\bar{u},\bar{w}) = \beta\left(\sum_i \bar{e}_i x_i, \sum_j \bar{e}_j y_j\right) =$$

$$= \sum_i x_i \beta\left(\bar{e}_i, \sum_j e_j y_j\right) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) y_j =$$

$$= [x_1 \dots x_n] B \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Def Data una forma bilineare $\beta : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$

Sia $\beta: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una forma bilineare.

ALLORA 1) β è SIMMETRICA $\Leftrightarrow \forall$ base $\mathcal{B}$ la matrice associata a β è simmetrica, cioè ${}^tB = B$

2) β è antisimmetrica $\Leftrightarrow \forall$ base $\mathcal{B}$ la matrice associata a β è antisimmetrica cioè ${}^tB = -B$.

DIM: se β simmetrica $\Rightarrow \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \beta(\bar{e}_j, \bar{e}_i)$ $\forall i,j$

β antisimmetrica $\Rightarrow \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = -\beta(\bar{e}_j, \bar{e}_i)$ $\forall i,j$.

Viceversa: se $B = {}^tB \Rightarrow$

$$B(x,y) = {}^txBy =$$

$$= {}^t[{}^txBy] = {}^ty{}^tBx =$$

$$= {}^tyBx =$$

$$= B(y,x) \rightarrow \text{simmetrica.}$$

similmente se $B = -{}^tB$ antisimmetrica.

Sia β una forma bilineare simmetrica o antisimmetrica. Allora.

- $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n$ diciamo che $\bar{x}$ è <u>ortogonale</u> a $\bar{y}$ e scriviamo $\bar{x} \perp \bar{y} \iff B(\bar{x},\bar{y}) = 0$

$\bar{x} \perp_B \bar{y}$

- $\bar{x} \in V_n$ è un vettore isotropo $\iff \bar{x} \perp \bar{x}$

cioè $\beta(\bar{x}, \bar{x}) = 0$

e $\bar{x} \neq \bar{0}$

- posto $X \subseteq V_n(\mathbb{K})$, si definisce

$$X^{\perp} := \{\bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) \mid \forall \bar{x} \in X : \beta(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

e $X^{\perp}$ è detto "X perp" o "ortogonale di X"

- si dice Radicale di β l'insieme

$$Rad(\beta) := V^{\perp}$$

di tutti i vettori $\bar{x}$ tali che $\bar{x} \perp \bar{y}$ $\forall y \in V$

- β è detta non degenere se $Rad(\beta) = \{\bar{0}\}$.

ed è non degenera $\Rightarrow$

VALGONO TUTTE LE PROPRIETÀ 1-7

DIM: 1) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in X^{\perp}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\forall \bar{x} \in X: \beta(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

$\forall \bar{x} \in X: \beta(\bar{x}, \bar{v}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \beta(\bar{x}, \bar{u}) + \gamma \beta(\bar{x}, \bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in X$

$\beta(\bar{x}, \alpha\bar{u}) + \beta(\bar{x}, \gamma\bar{v}) =$

$= \beta(x, \alpha\bar{u} + \gamma\bar{v}) = 0$

$\forall\ X^{\perp} \leq V_n(\mathbb{K})$ ∎

2) Sia $\bar{u} \in Y^{\perp} \Rightarrow \forall \bar{y} \in Y: \bar{u} \cdot \bar{y} = 0 \Rightarrow \forall \bar{x} \in X \subseteq Y: \bar{x}\bar{u} \cdot \bar{x} = 0$

$\Rightarrow u \in X^{\perp}$

Sia d'ora innanzi β una forma bilineare e simmetrica.

Def: Una forma β bilineare e simmetrica è detta **prodotto scalare**.

⚠ NON CONFONDERE IL PRODOTTO SCALARE

$$V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

CON IL PRODOTTO PER SCALARE

$$\mathbb{K} \times V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K}).$$

proprietà dei prodotti scalari.

1) $\forall X \subseteq V_n(\mathbb{K})$: $X^\perp \leq V_n(\mathbb{K})$
2) $\forall X, Y \subseteq V_n(\mathbb{K})$: $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$
3) $\mathcal{L}(X)^\perp = X^\perp$

3) poiché $X \subseteq \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathcal{L}(X)^\perp \subseteq X^\perp$ per (2)

supponiamo ora $\bar{z} \in X^\perp \Rightarrow \forall \bar{x} \in X : \beta(\bar{x}, \bar{z}) = 0$

$\Rightarrow \sum \alpha_i \beta(\bar{x}, \bar{z}_i) = 0 \quad \forall \bar{z}_i, \alpha_i$ finiti

$\Rightarrow \beta(\bar{x}, \sum \alpha_i \bar{z}_i) = 0 \Rightarrow \beta(\bar{x}, \bar{t}) = 0$

$\forall \bar{t} \in \mathcal{L}(X)$.

$\Rightarrow X^\perp \subseteq \mathcal{L}(X)^\perp$

4) Sia $\bar{x} \in X$ e $\forall \bar{z} \in X^\perp \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z} = 0 \Rightarrow x \in X^{\perp\perp}$

$\Rightarrow X \subseteq X^{\perp\perp}$

5) Sia $X \subseteq V_n(\mathbb{K})$. Poiché $\mathcal{L}(X)^\perp = X^\perp$ ci basta far vedere che le proprietà valgono solo su di un insieme di generatori per $\mathcal{L}(X)$.

4) $X \subseteq X^{\perp\perp}$

se il prod. scalare è non degenere

5) $\dim X^{\perp\perp} + \dim X^{\perp} = n = \dim V_n(\mathbb{K})$

6) $\mathcal{L}(X) = X^{\perp\perp}$

se $\mathcal{L}(X)$ non contiene vettori isotropi $\neq 0$ è non deg.

7) $X^{\perp} \oplus X^{\perp\perp}$ e $V_n(\mathbb{K}) = X^{\perp} \oplus X^{\perp\perp} =$

$= X^{\perp} \oplus \mathcal{L}(X)$.

Def: Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Un prod. scalare su $V(\mathbb{K})$ è

detto positivo se $\forall \bar{x} \in V$: $\beta(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$

negativo se $\forall \bar{x} \in V$: $\beta(\bar{x}, \bar{x}) \leq 0$

definito se $\forall x \in V$: $\beta(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$

oss: Se β definito positivo $\Rightarrow$ non esistono vettori isotropi

Inoltre poiché $\mathcal{L}(X) \leq V_n(\mathbb{K})$ con $n < \infty$ possiamo supporre che sia $\mathcal{L}(X)$ sia finitamente generato.

WLOG supponiamo X con $|X| = t < \infty$ e X base di $\mathcal{L}(X)$.

Definisco $\varphi_X : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^t$

$\bar{y} \longrightarrow$ (illegible)

$(\beta(\bar{y}, \bar{x}_1) \dots \beta(\bar{y}, \bar{x}_t))$

<u>oss</u>: $\ker(\varphi_X) = X^{\perp}$ (1)

dominio di $\varphi_X = V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$ ha dim $= n$.

$\dim \operatorname{Im}(\varphi_X) = \dim \mathcal{L}(X)$

Supponiamo che l'applicazione φ_x non sia suriettiva $\Rightarrow$ esiste un $\bar{y} \in V_n(\mathbb{K})$ tale che $\bar{y} \in \mathrm{Rad}(B)$ e $\bar{y} \neq 0$

Se φ_x non suriettiva $\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Im}\, \varphi_x < t$

$\Rightarrow \exists\, W \leq \mathbb{K}^t$ tale che $\mathrm{im}\, \varphi_x \subseteq W$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 \dots \delta_t$ tali che $(\delta_1 \dots \delta_t) \neq (0 0 \dots 0)$.

$\delta_1 B(\bar{y}, \bar{x}_1) + \dots + \delta_t B(\bar{y}, \bar{x}_t) = 0$

$\forall\, y \in V \Rightarrow B(\bar{y}, \delta_1 \bar{x}_1 + \dots + \delta_t \bar{x}_t) = 0$

$\forall y \in V_n(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow \delta_1 \bar{x}_1 + \dots + \delta_t \bar{x}_t \in \mathrm{Rad}(\beta)$

$\Rightarrow \delta_1 \bar{x}_1 + \dots + \delta_t \bar{x}_t = \underline{0}$ perché β non degenere

$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_t = 0$ perché $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_t)$ base di $\mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow$ libera.

$\Rightarrow \varphi_x$ è suriettiva.

$\Rightarrow$ Teorema nullità + rango.

$$\dim \mathrm{Im}\, \varphi_x + \dim \ker \varphi_x = n$$

$$\dim \mathcal{L}(X) + \dim X^{\perp} = n$$

$$\Rightarrow \dim X^{\perp} = n - \dim \mathcal{L}(X).$$

d'altro canto c'è anche

$$\dim X^{\perp\perp} = n - \dim \mathcal{L}(X)^{\perp} =$$

$$= n - \dim X^{\perp} =$$

$$= n - (n - \dim \mathcal{L}(X)) =$$

$$= \dim \mathcal{L}(X).$$

poiché $\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$

e quindi $\dim X^{\perp} + \dim X^{\perp\perp} = n.$

7) Supponiamo $X^{\perp} \oplus X^{\perp\perp}$

Supponiamo $\exists\, \bar{t} \in X^{\perp} \cap X^{\perp\perp} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(\bar{t}, \bar{t}) = 0$

poiché $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$ e per ipotesi

$\mathcal{L}(X)$ non contiene vettori isotropi

si ha $X^{\perp\perp} \cap X^{\perp} = \{\underline{0}\}$ e dunque

$X^{\perp\perp} \oplus X^{\perp} \leq V_n(\mathbb{K})$

di più $\dim(X^{\perp\perp} \oplus X^{\perp}) = \dim X^{\perp\perp} + \dim X^{\perp}$

$= n \Rightarrow X^{\perp\perp} \oplus X^{\perp} = V_n(\mathbb{K})$ □

Def: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale con prod scalare non degenere. Sia $X \leq V_n(\mathbb{K})$. Si dice

complemento ortogonale di X in V_n

ogni sottospazio Y tale che

$$X \oplus Y = V_n(\mathbb{K})$$

$$Y \subseteq X^\perp$$

Il complemento ortogonale di X è unico tra tutti i possibili dati, a patto che esista.

Def: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sia $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare.

Si dice che $\cdot$ è definito positivo se

$$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R}): \quad \bar{v}\cdot\bar{v} \geq 0 \text{ e } \bar{v}\cdot\bar{v} = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$$

definito negativo se

$$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R}): \quad \bar{v}\cdot\bar{v} \leq 0 \text{ e } \bar{v}\cdot\bar{v} = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$$

oss: Se $\cdot$ definito positivo (negativo)
$\Rightarrow$ non esistono vettori isotropi.

Def: In $\mathbb{R}^n$ si dice prodotto scalare standard il prodotto scalare

$${}^tX = [x_1 \dots x_n] \quad {}^tY = [y_1 \dots y_n]$$

$$(X, Y) \longrightarrow X \cdot Y = {}^tXY$$

$$(x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n) \to \sum_i x_i y_i = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

oss: In $\mathbb{R}^n$ il prod. scalare standard è definito positivo: $(x_1 \dots x_n) \cdot (x_1 \dots x_n) = \sum_i x_i^2 \geq 0$

e $\sum x_i^2 = 0 \iff \forall i : x_i = 0$.

Il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$ è detto prodotto Euclideo.

Uno spazio vettoriale reale dotato di prod. scalare definito positivo è detto spazio vettoriale euclideo.

oss: la matrice rapp. del prod. scalare sta. rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è la matrice identica.

Def: Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$. e $V = V_n(\mathbb{K})$

Si dice norma ogni funzione.

$$\|\cdot\| : V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$$

tale che valgano le seguenti proprietà:

1) $\|\bar{v}\| \geq 0 \quad \forall \bar{v} \in V$
2) $\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$
3) $\|\alpha \bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$
4) $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$ disuguaglianza triangolare



una norma corrisponde all'idea di "lunghezza di un vettore".

Esempi in $\mathbb{R}^n$

$\bar{v} = (v_1 \dots v_n)$

$$\|\bar{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|\bar{v}\|_\infty := \sup_i |v_i|$$

$$\|\bar{v}+\bar{w}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i+w_i| \le \sum_{i=1}^{n} |v_i| + \sum_{j=1}^{n} |w_i|$$

$$\|\bar{v}+\bar{w}\|_\infty = \sup |v_i+w_i| \le \sup(|v_i|+|w_i|) \le$$
$$\le \sup |v_i| + \sup |w_i|$$

Oss → Legame fra prod. scalare, forme quadratiche e norme.

$\beta: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prod. scalare non degenere.

Si dice **forma quadratica** associata a β.

la funzione $q: V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$\bar{x} \to \beta(\bar{x}, \bar{x})$.

oss: $q(\alpha\bar{x}) = \beta(\alpha\bar{x}, \alpha\bar{x}) = \alpha^2 \cdot q(\bar{x})$

$q(\bar{x}+\bar{y}) = \beta(\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) =$

$= \beta(\bar{x},\bar{x}) + \beta(\bar{y},\bar{x}) + \beta(\bar{x},\bar{y}) + \beta(\bar{y},\bar{y}) =$

se $2 \neq 0$ $= q(\bar{x}) + 2\beta(\bar{x},\bar{y}) + q(\bar{y})$

$$\beta(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})\right)$$

Se β = prod. scalare, definito positivo $\Rightarrow$

$$q(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \neq 0$$

$$q(a\bar{x}) = |a| q(\bar{x}).$$

$\Rightarrow$

Definiamo $\|\bar{x}\|_2 := \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$

ove $\cdot : V(\mathbb{R}) \times V(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ def. positiva.

$\|\bar{x}\|_2$ è detta **norma euclidea**

DOBBIAMO DIMOSTRARE ANCORA

$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

progetto di dimostrazione: 2 passi.

1) DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

$$-1 \leq \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|} \leq 1$$

2) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$